Tema 2.2. Problemas de cinemática

J. Hermenegildo Garcia-Ortiz

February 14, 2019

1. Dada la distribución de velocidades bidimensional y estacionaria:

$$u = kx, \quad v = -ky, \quad w = 0, \tag{1}$$

donde k es una constante positiva, obtenga y dibuje las líneas de corriente. ¿Existe la posibilidad de que haya líneas de corriente que se corten?

2. Se da un campo estacionario, incompresible y bidimensional de velocidad dada por:

$$\vec{V} = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}, \tag{2}$$

donde las coordenadas x, y se dan en metros y la magnitud de la velocidad se da en m/s. Determinar:

- Si existe un punto de estancamiento y, si es así, ¿donde?.
- Obtenga las líneas de corriente
- ¿Es irrotacional el flujo?

3. Sea el siguiente campo de velocidades:

$$v_x = a(x - x_0), \quad v_y = -a(y - y_0), \quad v_z = ct, \tag{3}$$

que corresponde a un punto de remanso de coordenadas x_0, y_0 en el movimiento dentro del plano xy, que se desplaza con aceleración constante en la dirección z. a y c son constantes. Se pide:

- Trayectoria que pasa por el origen en el instante $t = 0$.
- Trazas que pasan por el origen en distintos instantes.
- Líneas de corriente que pasan por el origen en distintos instantes.

4. Se tiene en campo de velocidades bidimensional dado por:

$$v_x = -\frac{ay}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{ax}{x^2 + y^2}, \tag{4}$$

donde a es una constante. Se pide:

- Calcular las líneas de corriente.
- Comprobar que el campo de velocidades es el de un líquido.
- Comprobar que la vorticidad es cero, si se excluye el origen de coordenadas. Calcular el potencial de velocidades.

5. Se considera el movimiento plano de un líquido cuya velocidad en coordenadas cilíndricas (r, θ) viene dada por:

$$v_r(r,t) = \frac{A}{r}, \quad v_\theta(r,t) = \frac{B(1 + Ct)}{r} \tag{5}$$

donde A, B y C son constantes con dimensiones apropiadas. Se pide:

- Determinar la ecuación de la trayectoria y la senda.

- Calcular las líneas de corriente; en particular las que pasan por el punto P$(r_0, 0)$.

6. **EXAMEN MF-SEPT-2015**. Dado el campo de velocidades siguiente:

$$u(x,y,t) = at, \quad v(x,y,t) = \frac{y^2}{at^3}, \quad t > 0, \tag{6}$$

donde $u(x,y,t)$ y $v(x,y,t)$ son las componentes de la velocidad con unidades m/s, x e y son las posiciones de un punto en m siguiendo un sistema de ejes coordenados cartesianos, t es el tiempo en s y la constante a tiene unidades de aceleración (m/s^2).

- Calcular el rotacional de la velocidad, también denominado vector vorticidad y la divergencia de la velocidad, también denominada velocidad de deformación cúbica unitaria.
- Calcular la función potencial de velocidades y la función de corriente si existen.
- Determinar la trayectoria y la senda de la partícula fluida que en el instante $t = t > 0$ está en $\vec{x} = \vec{x_i} = (x_i, y_i)$
- Determinar la línea de corriente que en el instante $t > 0$ pasa por el punto $\vec{x} = \vec{x_0} = (x_0, y_0)$
- Determinar la línea de traza que en el instante $t > 0$ pasa por el punto $\vec{x} = \vec{x_\tau} = (x_\tau, y_\tau)$

7. **EXAMEN MFI-2017**. Dado el campo de velocidades siguiente:

$$u(x,y,t) = -\frac{y}{t_0 + t}, \quad v(x,y,t) = \frac{2x}{t_0 + t}, \quad t > 0, \tag{7}$$

donde $u(x,y,t)$ y $v(x,y,t)$ son las componentes de la velocidad con unidades m/s, x e y son las posiciones de un punto en m siguiendo un sistema de ejes coordenados cartesianos, t es el tiempo en s y la constante t_0 es un tiempo en (s).

- Calcular los puntos de velocidad nula o de remanso.
- Calcular la ecuación de la trayectoria.
- Calcular el rotacional de la velocidad, también denominado vector vorticidad, y la divergencia de la velocidad, también denominada velocidad de deformación cúbica unitaria.
- Calcular la función potencial y la función de corriente si existen.
- Determinar la línea de corriente que pasa por el punto $\vec{x} = \vec{x_0} = (x_0, y_0)$ como función del tiempo.

8. **EXAMEN MFI-2017**. Se tiene el campo de velocidades siguiente para un flujo incompresible.

$$u(x,y,t) = a_1(y + a_2)(x^2 - a_3^2)t, \quad v(x,y,t) = b_1(x + b_2)(y^2 - b_3^2)t, \quad t > 0; \tag{8}$$

donde $u(x,y,t)$ y $v(x,y,t)$ son las componentes de la velocidad con unidades m/s, x e y son las posiciones de un punto en m siguiendo un sistema de ejes coordenados cartesianos, t es el tiempo en s y las unidades de las constantes a_1 y b_1 medidas en $1/(ms)^2$, y a_2, a_3, b_2, b_3 medidas en m. Nada se sabe, en principio del signo de estas constantes.

- Calcular los valores de las constantes sabiendo que:
  (a) Los puntos (0,0) y (l, l) son de remanso (no los únicos)donde es $l > 0$, conocida y se mide en m.
  (b) La velocidad vertical del punto $(l, 0)$ en el instante t_1 conocido es u_1 también conocida.
- Determinar todos los puntos de remanso.
- ¿Es el flujo obtenido un flujo potencial?.

9. **MF-Examen**. Dado el campo de velocidades siguiente:

$$u(x,y,t) = \frac{x}{t_0 + t}, \quad v(x,y,t) = \frac{y}{t_0 + 2t}, \quad t > 0, \tag{9}$$

donde $u(x,y,t)$ y $v(x,y,t)$ son las componentes de la velocidad con unidades m/s, x e y son las posiciones de un punto en m siguiendo un sistema de ejes coordenados cartesianos, t es el tiempo en s y la constante t_0 es un tiempo en (s).

- Calcular los puntos de velocidad nula o puntos de remanso.
- Calcular el rotacional de la velocidad
- Obtener la velocidad de deformación cúbica unitaria.
- Calcular la función potencial, φ, si existe.
- Calcular la función de corriente, Ψ, si existe.
- Determinar la senda y la trayectoria de la partícula fluida que en el instante $t = 0$ está en $\vec{x} = \vec{x_i} = (x_i, y_i)$.
- Determinar la línea de corriente que pasa por el punto $\vec{x} = \vec{x_0} = (x_0, y_0)$ como función del tiempo.
- Determinar la línea de traza que pasa por el punto $\vec{x} = \vec{x_\tau} = (x_\tau, y_\tau)$
- ¿Qué ocurre con estas líneas si se elige $\vec{x_i} = \vec{x_\tau} = \vec{x_0}$ y por qué?

10. **MF-Examen Febrero 2018**. Se tiene el siguiente campo de velocidades adimensionalizado:

$$u(x, y, t) = a_1 tx + a_2 (ty)^2, \quad v(x, y, t) = b_1 tx + b_2 (ty)^2, \tag{10}$$

donde $u(x, y, t)$ y $v(x, y, t)$ son las componentes de la velocidad adimensionalizada, x e y son las posiciones de un punto adimensionalizadas y t es el tiempo adimensional. Nada se sabe, en principio, del signo de esas constantes y tampoco tienen dimensiones.

- Sabiendo que el potencial de velocidades existe para todo t y que en el punto (1,1) vale: $\varphi(1, 1, t) = t + t^2$. Determinar el valor de las constantes.
- Determinar todos los puntos de remanso.
- El campo de velocidades obtenido, ¿puede representar el movimiento de un líquido?
- Determinar la trayectoria y la senda de la particula fluida que en el instante $t = 0$ está en $\vec{x} = (1, 1)$.
- Determinar la línea de corriente que pasa por el punto $\vec{x} = (1, 1)$ como función del tiempo.
- Determinar la línea de traza que pasa por el punto $\vec{x} = (1, 1)$ como función del tiempo.