Tema 2.3-6. Problemas de ecuaciones generales 2

J. Hermenegildo Garcia-Ortiz

1. Se tiene un chorro bidimensional de agua de espesor h y velocidad v_0 que incide sobre una placa plana, formando con la misma un ángulo de θ, tal y como se muestra en la figura 1. El chorro es deflectado por la placa, en otros dos chorros paralelos a la placa de espesores, h_1 y h_2, respectivamente. Se considera el problema estacionario, la presión es la ambiente en todas las zonas de entrefase aire-agua, así como en las secciones de entrada del chorro incidente y las de salida de los chorros deflectados. Las fuerzas másicas y viscosas son despreciables. Supóngase además que las velocidades en las secciones de salida son iguaes a la incidente v_0.
Se pide:

    a) Mediante la aplicación de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, calcular la fuerza normal a la placa.

    b) Teniendo en cuenta que al no haber rozamiento viscoso no puede haber fuerza tangente a la placa, calcular h_1 y h_2 mediante las ecuaciones de conservación de la masa y cantidad de movimiento.

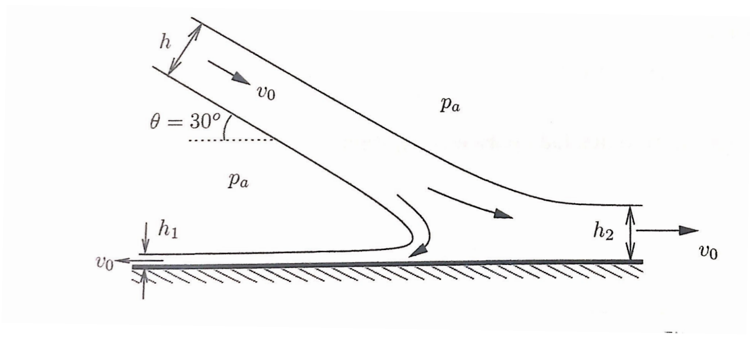


Figura 1: Esquema del chorro bidimensional impactando oblicuamente sobre la placa

2. A través de la tobera de la figura se descarga a la atmósfera un chorro de un líquido de densidad ρ, con un caudal Q y una sección transversal de área A. El chorro impacta sobre un deflector y es desviado según se indica en la figura 2. El deflector se mueve con una velocidad constante U, alejándose del chorro. Se supondrá, en primer lugar, que el módulo de la velocidad del líquido relativa al deflector en una sección transversal del chorro aguas abajo del deflector coincide con el que existe en una sección transversal del chorro incidente, y que en ambas secciones dicho módulo es uniforme. Se despreciarán las fuerzas másicas.

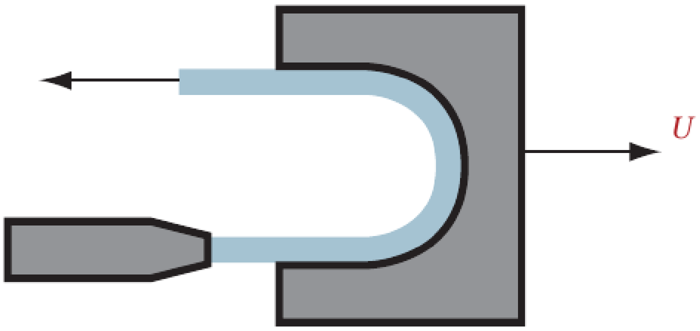


Figura 2: Deflector

Determinar:

a) Fuerza que ejerce el líquido sobre el deflector.

b) Velocidad del deflector para la que resulta máxima la potencia transmitida a este para un caudal del chorro dado Q.

A continuación se supondrá que el módulo de la velocidad del líquido relativa al deflector se reduce en un 0,5 % entre las secciones de entrada y salida de este. Determinar:

c) Potencia disipada en el líquido e incremento de la temperatura de este al circular por el deflector. (Calor específico del líquido: c.)

3. La cámara de combustión de un cohete supersónico tiene a la salida una tobera convergente-divergente como se esquematiza en la figura 3 con área a la salida A_s. A la cámara entran un gasto G_c de combustible y un gasto G_o de oxígeno (ambos constantes) que reaccionan químicamente produciendo un calor total Q por unidad de tiempo. Como consecuencia se obtienen unos productos de combustión a una presión y temperatura elevadas que se aceleran en la tobera y salen de la misma a una velocidad supersónica V_s y a una presión p_s que, en general, no es igual a la presión atmosférica p_a.

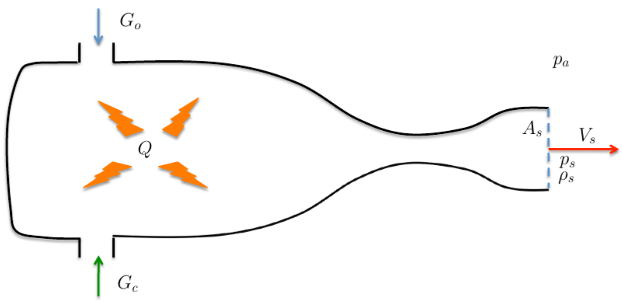


Figura 3: Cohete supersónico

Se supone que los gases producto de la combustión se comportan como gas perfecto de contante R_g y relación de calores específicos γ. Se pide:

a) Aplicando las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en forma integral calculen el empuje del cohete en función de la presión a la salida p_s y de los datos del problema $(Q, G_o, G_c, p_a, A_s$ y $\gamma)$. Para ello supongan las siguientes aproximaciones:

- Velocidad y temperatura de entrada de combustible y oxidante despreciables frente a V_s y T_s, respectivamente.
- Fuerzas másicas y de viscosidad despreciables;
- Cámara aislada térmicamente.
- Problema estacionario y las magnitudes fluidas uniformes a la entradas y salida.

4. Un depósito de sección A que contiene un líquido de densidad ρ descarga a través de un pequeño conducto de diámetro D situado en la parte inferior del mismo. El depósito posee unas ruedas debajo de la tapa inferior. Se desea calcular:

    a) la fuerza F que se tiene que ejercer (ver figura 4) para que el depósito no se desplace como consecuencia de la descarga. Para ello utilicen las ecuaciones en forma integral y supongan que el flujo es ideal. Calculen F en función del tiempo y de los datos del problema suponiendo que $H(t = 0) = H_0$.

    b) Obtener la expresión del tiempo que tardaría en descargarse el depósito.

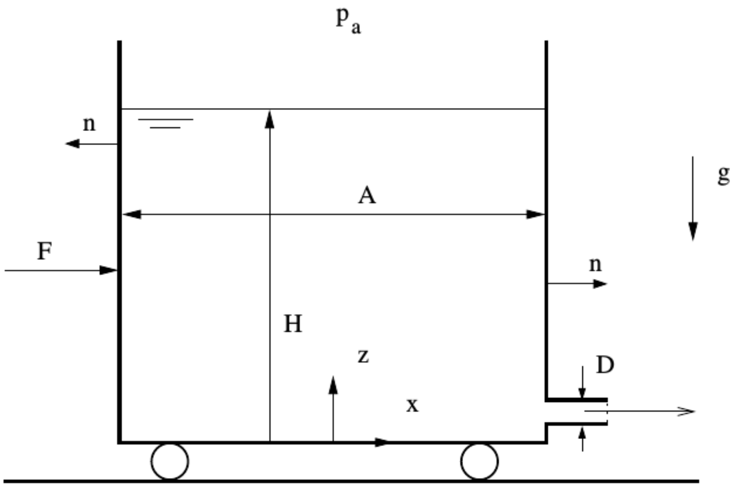


Figura 4: Carrito

5. **MF1-SEPT 2016.** Se desea obtener la potencia teórica que puede extraerse de una turbina sin pérdidas en funcionamiento estacionario. La turbina tiene un conducto de entrada de área A, en el que se han medido los valores de velocidad, presión y temperatura (v_1, p_1 y T_1), así como un conducto de salida de igual sección, A, en el que se han medido unos valores de presión y temperatura (p_2 y T_2). Se supone que la turbina no tiene pérdidas de masa, está totalmente aislada y toda la energía que pierde el fluido al atravesarla se transforma en energía cinética extraída por la turbina al eje. Los esfuerzos viscosos son despreciables en todo el dominio excepto en una

capa delgada alrededor de la superficie interior de la turbina en contacto con el fluido, así como la gravedad y el resto de fuerzas másicas son despreciables también. Todas las propiedades que se mencionan se suponen uniformes en las secciones de entrada y salida. El fluido que atraviesa la turbina puede suponerse que se comporta como un gas caloríficamente perfecto de propiedades R_g y C_p conocidas.

a) Con los datos, establecer el flujo másico de aire a través de la turbina en función de las propiedades a la entrada, así como establecer el valor de la velocidad a la salida en función de las variables conocidas. (0.5 puntos)

b) Utilizando la ecuación de la cantidad de movimiento, calcular el valor de la fuerza que el fluido hace sobre la turbina como función de las orientaciones $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$, normales exteriores a las superficies 1 y 2. (0.5 puntos)

c) Finalmente, a partir de la ecuación de la energía, calcular el valor de la potencia extraída de la turbina. (1 punto)

6. **MF FEB-2018.** Suponga que se quiere subir una masa de M (kg) a una cierta altura. Se pretende emplear para ello una plataforma cuadrada con 4 boquillas de d (m) de diámetro, una en cada esquina y el peso se coloca a la altura del centroide. La manguera que alimenta las 4 boquillas puede producir un chorro de agua en cada una de ellas de v (m/s). Se conoce la densidad del agua ρ y la gravedad terrestre g. Determine el valor de v mínimo para que la plataforma empiece a elevarse en función del resto de parámetros del problema. (1 punto)

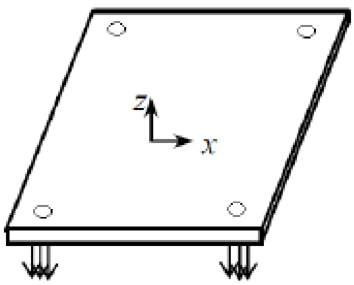


Figura 5: Plataforma elevadora.

7. El álabe de la figura se mueve a una velocidad constante absoluta U. Un chorro de agua fluye de la boquilla estática con una velocidad constante V, e incide sobre el álabe. Hallar el valor de la fuerza F_R que el álabe ejerce sobre el fluido. Considerar despreciables las fuerzas gravitatorias y los efectos viscoso.

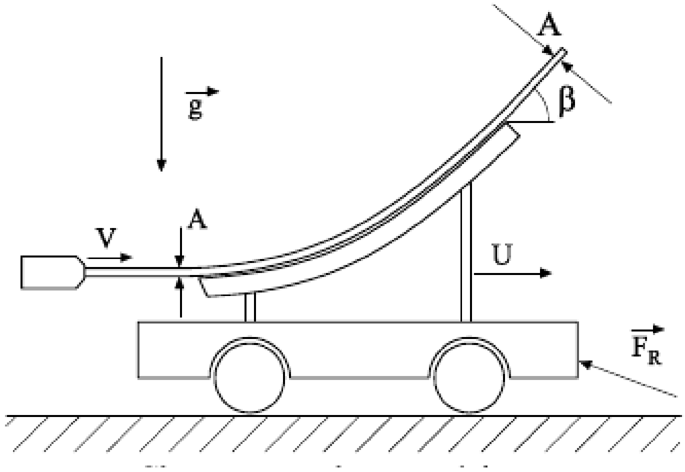


Figura 6: Chorro que golpea un álabe

8. Un aspersor formado por un único conducto, esquematizado en la figura 7. El brazo del aspersor forma ángulo recto con el conducto de entrada y tiene una boquilla en el extremo, dispuesta de tal forma que la corriente descarga al exterior un con ángulo α respecto al brazo del aspersor. Esta deflexión de la corriente provoca que el aspersor gire a velocidad angular Ω si el par $\vec{M}_R$ de resistencia al giro es nulo. Por el aspersor circula un caudal Q de agua, de densidad ρ constante. El área de la sección transversal del conducto es A en toda su longitud (incluida la boquilla de descarga) y la longitud del brazo es R. En la sección de entrada al aspersor la presión del agua es p_0 y la descarga ocurre a la atmósfera a presión p_a.

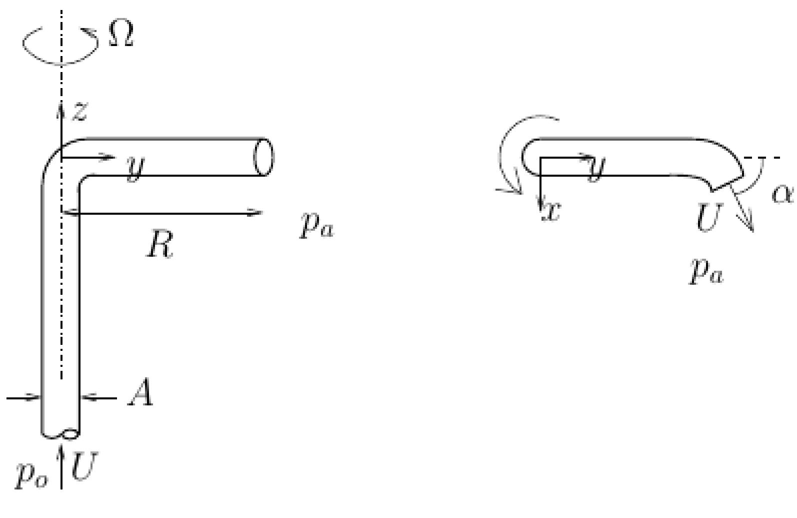


Figura 7: Aspersor con un solo brazo

9. El agua entra en el aspersor de la figura 8 (los dos brazos están contenidos en el pano horizontal del papel $X - Y$, y rota en Z) a través de una tubería vertical (Z) de diámetro D_1, con una velocidad media de v_1. El caudal de alimentación del aspersor se distribuye en partes iguales por los dos brazos de longitud L. Ambos brazos tienen

acopladas unas boquillas en sus extremos de diámetro D_2 que hacen que el chorro de salida tenga un ángulo α con la dirección radial según se indica en la figura.

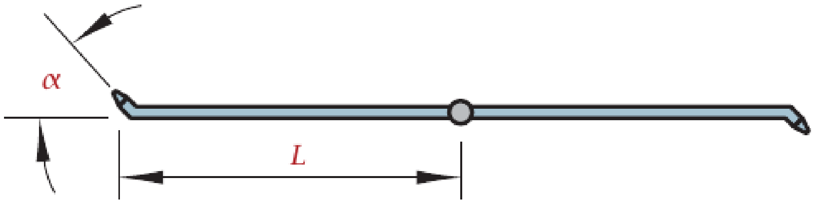


Figura 8: Aspersor con 2 brazos

a) Calcular el momento que se debe ejercer sobre el aspersor para mantenerlo sin girar.

b) Cuando se deja girar libremente, el aspersor alcanza una velocidad de giro estacionaria Ω_1. Calcular en estas condiciones el momento de las fuerzas de fricción que tienden a frenar el aspersor.

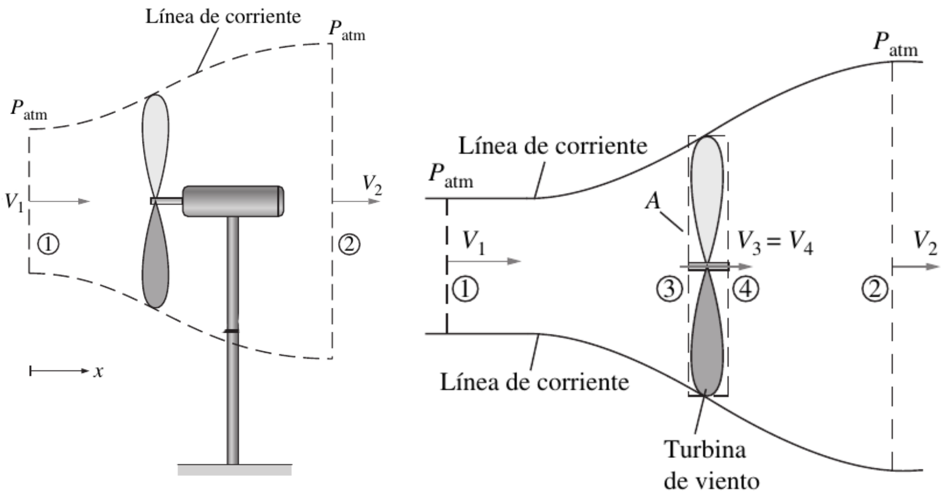
c) Calcular la velocidad de giro Ω_2 que alcanzaría el aspersor si no existiesen fuerzas de fricción que tendiesen a frenarlo.

10. **MF JUN-2018.** Una turbina eólica gira a velocidad angular Ω inmersa en un flujo uniforme de aire de densidad ρ, barriendo un disco de área A. El viento incidente tiene una velocidad $V_1 = U$ en la sección 1, en la que no está perturbado por la presencia de la turbina. La velocidad del aire disminuye y la presión aumenta desde la sección 1 hasta la sección 3, situada inmediatamente aguas arriba de la turbina. A través de la turbina se produce un salto de presión, siendo esta en la sección 4, situada inmediatamente aguas abajo de la turbina, inferior a la presión atmosférica. Desde la sección 4 hasta la sección 2, la presión aumenta hasta ser de nuevo igual a la atmosférica y la velocidad sigue disminuyendo hasta alcanzar el valor $V_2 = U(1 - 2a)$, siendo a el denominado coeficiente de velocidad inducida, que se supondrá conocido para las condiciones del problema. En la figura se ha representado con línea discontinua una superficie de corriente que idealmente separa el aire que atraviesa la aeroturbina del aire exterior. Se despreciará la posible resultante de las fuerzas de presión sobre dicha superficie de corriente. Se considerarán despreciables los efectos viscosos entre las secciones 1 y 3 y entre las secciones 4 y 2. El flujo se supondrá uniforme en cada una de las secciones transversales indicadas en las figuras. Se despreciarán las fuerzas másicas, el aire se considerará incompresible y el flujo, estacionario. Además de a, son datos conocidos U , A y ρ. Determinar:

    a) Velocidad $V_3 = V_4$ en la turbina, presiones manométricas p_3 y p_4 en las secciones 3 y 4, respectivamente, y áreas A_1 y A_2. (2 puntos)

    b) Fuerza de empuje sobre la turbina. (0.5 puntos)

    c) Usando la ecuación de la energía en forma integral, obtener la potencia extraída por la turbina. (1 punto) *d*) Valor del coeficiente de velocidad inducida para el que la potencia extraída por la turbina es máxima. (0.5 puntos)



(a) General

(b) V_c adicional en turbina

11. Un chorro de agua de sección transversal de área A impacta sobre una de las caras verticales de un cuerpo paralelepipédico de masa M que se encuentra apoyado en el suelo. La altura del cuerpo es H y la cara de apoyo en el suelo es cuadrada de lado b. El eje del chorro forma un ángulo α con la horizontal, y está contenido en el plano vertical perpendicular a la cara sobre la que impacta el chorro y que pasa por el centro de esta. El coeficiente de fricción estático entre el cuerpo y el suelo es μ_e. Se despreciarán los efectos de la gravedad sobre el agua y los efectos de la viscosidad, de forma que el módulo de la velocidad del agua relativa al cuerpo en zonas suficientemente alejadas de la zona de impacto es uniforme.

Se supondrá en primer lugar que el cuerpo está inicialmente en reposo y que la velocidad del chorro aumenta progresivamente. Determinar:

a) Velocidad del chorro necesaria para que el cuerpo empiece a deslizar.

b) Máxima altura del punto de impacto para la que el cuerpo empieza a deslizar antes de que se inicie su volcado lateral.

Se supondrá en lo que sigue que el chorro tiene una velocidad U conocida, y que el cuerpo se mueve por la acción del chorro con una velocidad $u_c = kU$, siendo k una constante $(0 \leq k \leq 1)$.

c) Suponiendo que el chorro es horizontal ($\alpha = 0$), determinar, en función de A, ρ, U y k, y en un sistema de referencia ligado a tierra, la potencia del chorro incidente, $\dot{W}_1$, la potencia del chorro deflectado al abandonar el cuerpo, $\dot{W}_2$, y la potencia consumida para mover el cuerpo, $\dot{W}_c$. Coméntese la relación que existe entre estas potencias.

d) Determinar el valor de k para el que la relación $\dot{W}_c/\dot{W}_1$ es máxima.

e) Suponiendo que el ángulo α es no nulo, determinar la fuerza que el chorro ejerce sobre el cuerpo en función de A, ρ, U, k y α.

12. **MF-SEPT 2018.** Supongan el depósito de agua de sección A ($A \ggg D$) de la figura **??** sobre el que se apoya un pistón de masa M. El movimiento del pistón desplaza el agua hacia un tubo de diámetro D que descarga en la atmósfera. Se desprecian los efectos de la viscosidad.

    a) Aplicar Bernoulli entre 1 y 4 para el caso de la figura y el caso del depósito abierto a la atmósfera. (1.5 puntos)

    - Indicar las condiciones de contorno en (1) y (4) para cada caso.
    - La condición expresada en el enunciado ($A \ggg D$), ¿tiene el mismo efecto en ambos casos (con y sin pistón)?
    - Obtener de la velocidad en 4 para cada caso.

    b) En el caso de que se consideraran pérdidas entre 2 y 3, ¿cómo se expresaría? (0.25 puntos)

    c) Si se considera viscosidad en la parte del tubo de vaciado, ¿qué condición se debe dar para que se considere desarrollado el flujo en 4? (0.25 puntos)

    d) Obtener la expresión del tiempo de descarga para el caso del depósito sin pistón (abierto a la atmósfera). ¿Cuánto tarda en vaciarse? (0.5 puntos)

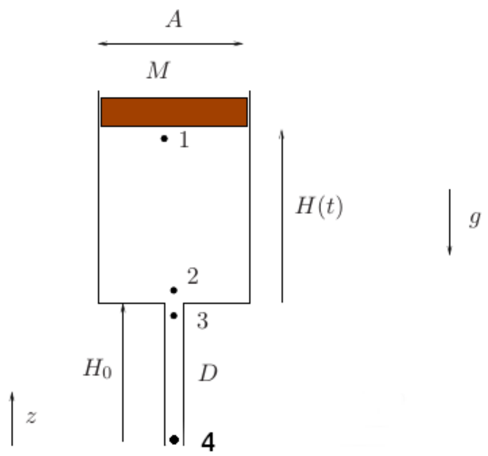


Figura 9: Descarga depósito

Nota: Se deben explicar y justificar todas las simplificaciones y las consideraciones que se vayan a tener en cuenta, de lo contrario no serán puntuadas.